EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….074**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze suma de numere complexe $(1+2i)^2+(1-2i)^2$.

(4p) **b)** Să se calculeze $\cos^2\frac{\pi}{13}+\sin^2\frac{\pi}{13}$.

(4p) **c)** Să se determine $a \geq 0$, știind că vectorulv $\vec{v}=(a+1)\cdot\vec{i}+a\cdot\vec{j}$ are modulul egal cu 5.

(4p) **d)** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC cu laturile $AB=5$, $BC=6$, $CA=5$.

(2p) **e)** Să se determine ecuația planului care trece prin punctul $A(2,1,1)$ și este paralel cu planul de ecuație $x+y+z=2$.

(2p) **f)** Să se scrie ecuația tangentei la cercul de ecuație $x^2+y^2=200$ în punctul $T(10,10)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine numărul soluțiilor întregi ale inecuației $x^2-5x+6\leq 0$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\hat{1}\cdot\hat{2}+\hat{3}\cdot\hat{4}+\hat{5}\cdot\hat{6}$ în inelul $\mathbf{Z}_{12}$.

(3p) **c)** Să se arate că $\log_2 16+\log_3\sqrt{81}$ este un număr natural.

(3p) **d)** Să se afle câte numere de forma $\overline{abc}$ există, știind că $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$.

(3p) **e)** Să se determine probabilitatea ca un element din $\mathbf{Z}_8$ să fie soluție a ecuației $\hat{x}^4=\hat{1}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=xe^{-x}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se arate că $e^x \geq ex$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se determine punctele de inflexiune ale funcției f.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră $G=\{A\in M_2(\mathbf{R})\mid \det(A)\in\{-1,1\}\}$, $H=\{A\in M_2(\mathbf{C})\mid \det(A)=1\}$ şi matricele $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$ $Z=\begin{pmatrix}0 & a\\ \frac{1}{a} & 0\end{pmatrix}$, cu $a\in\mathbf{R}^*$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se arate că $X,Z\in G$, $Y,I_2\in H$.

(4p) **b)** Să se demonstreze că dacă $A,B\in H$, atunci $A\cdot B\in H$. (Se ştie că determinantul produsului a două matrice este egal cu produsul determinanţilor lor).

(2p) **c)** Să se arate că orice matrice din mulţimea G este inversabilă şi inversa ei este în G.

(4p) **d)** Să se arate că $Z^2=I_2$.

(2p) **e)** Să se demonstreze că ecuaţia matriceală $U^2=I_2$ are în mulţimea H numai soluţiile $U=I_2$ şi $U=-I_2$.

(2p) **f)** Să se arate că ecuaţia matriceală $U^2=I_2$ are o infinitate de soluţii în mulţimea G.

(2p) **g)** Să se arate că nu există o funcţie bijectivă $f:G\to H$ astfel încât $f(A\cdot B)=f(A)\cdot f(B)$, pentru orice $A,B\in G$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=e\cdot x^{n+1}-(n+2)\cdot a^n\cdot x+n\cdot a^{n+1}$, unde $a\ge 0$, $n\in\mathbf{N}^*$ şi şirurile de numere reale $(a_n)_{n\ge1}$ şi $(g_n)_{n\ge1}$, cu $a_n\ge 0$, $g_n=(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(0)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(4p) **b)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in[0,\infty)$.

(4p) **c)** Să se arate că ecuaţia $f'(x)=0$ are o unică soluţie în mulţimea $[0,\infty)$. Notăm cu t_n această soluţie.

(2p) **d)** Să se arate că $f(t_n)\ge 0$ şi că $f(x)\ge 0$, $\forall x\ge 0$.

(2p) **e)** Să se arate că $e\cdot a_{n+1}-(n+2)\cdot g_{n+1}+n\cdot g_n\ge 0$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $g_1+g_2+g_3+\ldots+g_{n-1}+g_n+n\cdot g_n\le e(a_1+a_2+\ldots+a_n)$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2!}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}=e$, să se determine cel mai mic $c>0$ astfel încât pentru orice şir $(x_n)_{n\ge1}$, cu $x_n\ge 0$ şi orice $n\in\mathbf{N}^*$ să fie adevărată inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n}(x_1\cdot\ldots\cdot x_k)^{\frac{1}{k}}\le c(x_1+\ldots+x_n),\quad \forall n\in\mathbf{N}^*.$$